ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 91

Β . Σ , Γ . Λ, Δ. Σ , Ε. Σ , ΣΤ. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x-1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x-1\right)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}+2}{1} = 2$$

ii) $f\,'(x) = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}+2$ άρα $f\,'(0) = 2$ και επειδή $f(0) = \sqrt{0+1}+0 = 1$,

είναι $f\,'(0) = 2f(0)$

β)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+1}+2x) = (+\infty)+(-\infty) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+1}+2x)(\sqrt{4x^2+1}-2x)}{\sqrt{4x^2+1}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x} = \frac{1}{(+\infty)-(-\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$f(1) = -4 \Leftrightarrow -\alpha-\beta-3 = -4 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 1$ **(1)**

$f(3)+3f(1) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta+3-3\alpha-3\beta-9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Οπότε η (1) δίνει $\beta = 0$

β)

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ έχουμε $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-2}$

$$f\,'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-2)^2} \quad \text{οπότε } f\,'(1) = -4$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(1) = f\,'(1)(x-1) \Leftrightarrow$

$y + 4 = -4(x-1) \Leftrightarrow$

$y = -4x$

γ)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}-x-2\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-2}-x-2\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3-x^2+2x-2x+4}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x-2} = \frac{7}{+\infty} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

Ο z γράφεται $z = (3-k) + (2k+1)i$

α)

$3Re(z) + 4Im(z) = 3 \Leftrightarrow 3x + 4y = 3$

$3(3-k) + 4(2k+1) = 3$

$9 - 3k + 8k + 4 = 3$

$5k = -10 \Leftrightarrow k = -2$

β)

$|z-1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(3-k)+(2k+1)i-1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\sqrt{(2-k)^2+(2k+1)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$4 - 4k + k^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 5 \Leftrightarrow$

$5k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0$

Οπότε $z = 3 + i$ με $|z| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

γ)

$x = 3 - k \Leftrightarrow k = 3 - x$

Οπότε η $y = 2k+1 \Leftrightarrow y = 2(3-x)+1 \Leftrightarrow y = -2x+7$

Επομένως οι εικόνες M των z ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = -2x+7$